



DANTZIG

CONSULTORES

INFORME FINAL

Modelo LRIC Puro de Cálculo de Cargos de Acceso
Móviles de Servicios de Voz para la CRC de Colombia.

Mayo 2011

*Documento preparado por Dantzig Consultores para la
Comisión de Regulación de Comunicaciones, República de
Colombia.*



Índice

MODELO CRC LRIC PURO	1
INTRODUCCIÓN.....	1
CÁLCULO DEL VALOR DE REMUNERACIÓN DE COSTOS DEL CARGO DE ACCESO.....	1
<i>Cálculo de Costo Total de Largo Plazo</i>	2
<i>Cálculo del Costo Incremental por Servicio LRIC puro</i>	3
<i>Conclusiones Sobre las Metodologías</i>	5
DESCRIPCIÓN DEL MODELO LRIC PURO	9
REVISIÓN DE LAS FUNCIONES DE COSTO.....	9
<i>Modificación de las Funciones de Costos de los Equipos BSC, MGW y MSCS</i>	12
<i>Modificación de la Metodología de Dimensionamiento de los enlaces entre MGW y los puntos de terminación de red</i>	14
<i>Modificación en la Aplicación de los factores de utilización de todos los equipos de red</i>	16
ESTIMACIÓN DE DEMANDA.....	17
<i>Demanda de Abonados</i>	18
<i>Demanda de Tráfico Móvil</i>	22
COBERTURA.....	28
RESULTADOS OBTENIDOS.....	30
BIBLIOGRAFÍA	31
ANEXOS	32
METODOLOGÍAS ALTERNATIVAS DE CÁLCULO DEL VALOR DE REMUNERACIÓN DE COSTOS DEL CARGO DE ACCESO.....	32
<i>Cálculo de Costo Incremental de Largo Plazo por Elementos</i>	32
<i>Cálculo del Costo Marginal de Largo Plazo</i>	34

Tabla de Ilustraciones

<i>Ilustración 1: Esquema de Cálculo de Costo Total de Largo Plazo</i>	2
<i>Ilustración 2: Esquema de Cálculo de Costo Incremental por Servicio, Total Service LRIC pure</i>	4
<i>Ilustración 3: Esquema explicativo del fenómeno</i>	10
<i>Ilustración 4: Cambio en los costos entre el esquema actual y la utilización de curvas de costo</i>	11
<i>Ilustración 5: Cambio en los costos entre el esquema actual y la utilización de costos de inversión inicial y expansiones</i>	11
<i>Ilustración 6: Cambio en los costos entre el esquema actual y la utilización de segmentación de costos</i>	11
<i>Ilustración 7: Esquema de la modificación de los factores de utilización</i>	17
<i>Ilustración 8: Proyección de Demanda para el Mercado Colombiano</i>	22
<i>Ilustración 9: Proyección del Tráfico de Cargo de Acceso por Concesionaria</i>	27
<i>Ilustración 10: Esquema de Cálculo de Costo Incremental de Largo Plazo, Total Element LRIC+</i>	32
<i>Ilustración 11: Esquema de Cálculo de Costo Marginal de Largo Plazo</i>	35



MODELO CRC LRIC PURO

INTRODUCCIÓN

Con base en el contrato 014-11 del año 2011, la Comisión de Regulación de Comunicaciones-en adelante referida como CRC- contrató a Dantzig Consultores Ltda.- en adelante referida como Dantzig- para apoyar en el ajuste a la herramienta del modelo de costos de redes móviles de manera tal que pueda modelarse bajo un modelo de LRIC puro, aprovechando a su vez para incorporar información actualizada, esto bajo el proyecto regulatorio denominado "Análisis del mercado de 'Voz Saliente Móvil'".

Dentro de este contexto el objetivo de este trabajo es prestar sus servicios profesionales especializados de apoyo a la CRC para realizar dicho ajuste de la herramienta del modelo de costos de redes móviles que posee ésta, para obtener los valores asociados a los cargos de acceso, aplicando la metodología LRIC puro.

En este informe se describirán los principales cambios metodológicos realizados al modelo de costos de redes móviles de la CRC. La estructuración de este informe consta de tres elementos que sufrieron mayores cambios metodológicos que van más allá de actualizaciones y revisiones de costos, los cuales se organizan desde el mayor cambio metodológico hasta un cambio menor y la actualización de los parámetros de entrada básicos del modelo, como lo son la demanda de abonados, tráfico y cobertura geográfica. De esta forma, a continuación se explicará y mostrará en formulación matemática el cálculo de la remuneración de los costos, a través de la metodología de los costos totales de largo plazo y a través de la metodología LRIC puro. Luego, en un segundo capítulo se detallarán los cambios introducidos en relación al proceso de revisión de las funciones de costo del modelo de costos móviles actual de la CRC, para posteriormente mostrar los resultados de los modelos de pronóstico de abonados y tráfico de servicios de voz, así como el cálculo de la cobertura en base a la información actualizada del MinTIC. Finalmente se mostrarán los resultados del modelo.

CÁLCULO DEL VALOR DE REMUNERACIÓN DE COSTOS DEL CARGO DE ACCESO

Para el cálculo de la remuneración de los costos del cargo de acceso, se tomaron en consideración dos líneas principales de cálculo, estas corresponden a los cálculos a través del **Costo de Total de Largo Plazo (CTLP)** de forma tal de representar los costos medios, y a través del **Costo Incremental por Servicio** para representar el costo incremental del un servicio, también conocido como LRIC puro. Además de las metodologías anteriormente nombradas se exploraron dos metodologías alternativas, una de ellas para el cálculo de costos incrementales de largo plazo más un markup, el cual establece un símil para la comparación entre el nivel de CTLP y el nivel alcanzado por modelos en otros países, como es el caso del Reino Unido. La segunda metodología complementaria explorada corresponde al cálculo de los **Costos Marginales de Largo Plazo**, la cual según establece la teoría entrega una cota inferior para el LRIC Puro (Vogelsang, 2003), siendo ambos resultados muy similares. Ambos desarrollos alternativos explorados se encuentran en los anexos del presente informe.



CÁLCULO DE COSTO TOTAL DE LARGO PLAZO

La primera alternativa de cálculo es a través del **Costo de Total de Largo Plazo (CTLP)**, donde el cargo de acceso se obtiene en términos metodológicos de la división entre los costos totales¹ y la demanda total (ver Ilustración 1), es decir incluyendo reposición desde cero y los incrementos de esta, este es el tipo de cálculo de costos que se ocupa actualmente en el modelo de CRC de telefonía móvil.

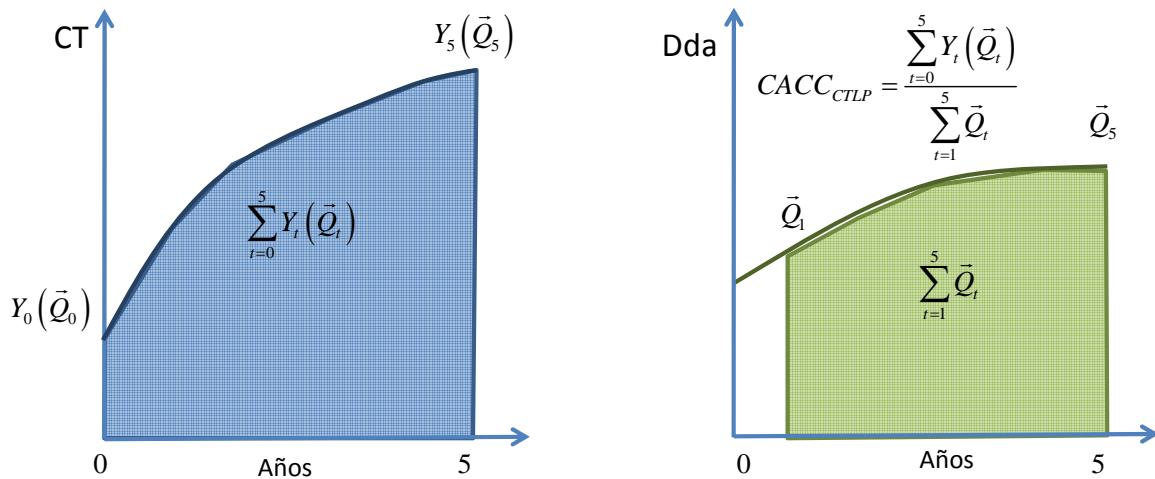


Ilustración 1: Esquema de Cálculo de Costo Total de Largo Plazo²

Para el cálculo del costo total de largo plazo es necesario contar con los siguientes datos presentes en el modelo, por empresa:

$I_{n,t}$: Costo de Inversión en el año t para el elemento de tipo n .
$G_{n,t}$: Costo operacional en el año t para el elemento de tipo n .
$Q_{n,t}$: Demanda en términos de los activos para el activo n para el año t .
$D_{n,t}$: Depreciación por elemento de tipo n en el año t . {cero, lineal, acelerada, geométrica}
tax	: Tasa de Tributación
VR_n	: Valor Residual del elemento n .
$Y_{n,t}$: Costo Total de Largo Plazo asociado al año t y el elemento n (Valor a Determinar)

¹ Es decir incluyendo la reposición de la empresa desde cero y su incremento de costos por la demanda futura

² Las fórmulas presentadas en la Ilustración 1, Ilustración 10, Ilustración 2 y Ilustración 11, son sólo para dar cuenta de las relaciones de cálculo, la fórmula final se encuentra más adelante en el capítulo.



De esta forma el Costo Total de Largo Plazo se obtiene de la suma de tres factores, el costo de la inversión, la depreciación por la tasa de tributación y los gastos ponderados por el complemento de la tasa de tributación, lo cual se lleva a valor presente y se le resta el valor residual de los elementos, en el año final. De acuerdo a la siguiente ecuación:

$$-\sum_{t=0}^5 \frac{I_{n,t}}{(1+K_0)^t} + \sum_{t=0}^5 \frac{(Y_{n,t} - G_{n,t}) \cdot (1-tax) + D_{n,t} \cdot tax}{(1+K_0)^t} + \frac{VR}{(1+K_0)^5} = 0$$

Para obtener el valor del Cargo de Acceso es necesario dividir por la demanda total (es decir incluyendo reposición) a través de los 5 años de evaluación, respectivamente para estimar la tarifa correspondiente al CTLP:

$$P_j = KT_j \sum_{n \in N} FR_{j,n} \left[\frac{\sum_{t=0}^5 \frac{Y_{n,t}}{(1+K_0)^t}}{\sum_{t=1}^5 \frac{Q_{n,t}}{(1+K_0)^t}} \right]$$

Donde:

- P_j : Costo a Remunerar por el Servicio j
- KT_j : Factor de Capital de Trabajo para el servicio j .
- $FR_{j,n}$: Factor de Ruteo, o factor de equivalencia entre uso de los elementos y su demanda de diseño por servicio, para el elemento n y el servicio j .

En términos de la implementación en el modelo ésta es contenida en la hoja 'Cálculo.CTLP'.

CÁLCULO DEL COSTO INCREMENTAL POR SERVICIO LRIC PURO.

La segunda variación metodológica es a través del cálculo del cargo de acceso a través del **Costo Incremental por Servicio (CI)**, también conocido como LRIC puro, en esta variación se obtiene a través de la comparación entre una empresa que provee el servicio de voz de acceso y una empresa que no lo provee (ver Ilustración 2), determinando así los costos incrementales necesarios para brindar el servicio, es importante notar que esta variación es muy cercana a la recomendada por la Comisión Europea (EC, 2009), con la excepción de considerar además de los costos directos de red, los directamente relacionados con las tareas administrativas ligadas con el servicio de acceso.

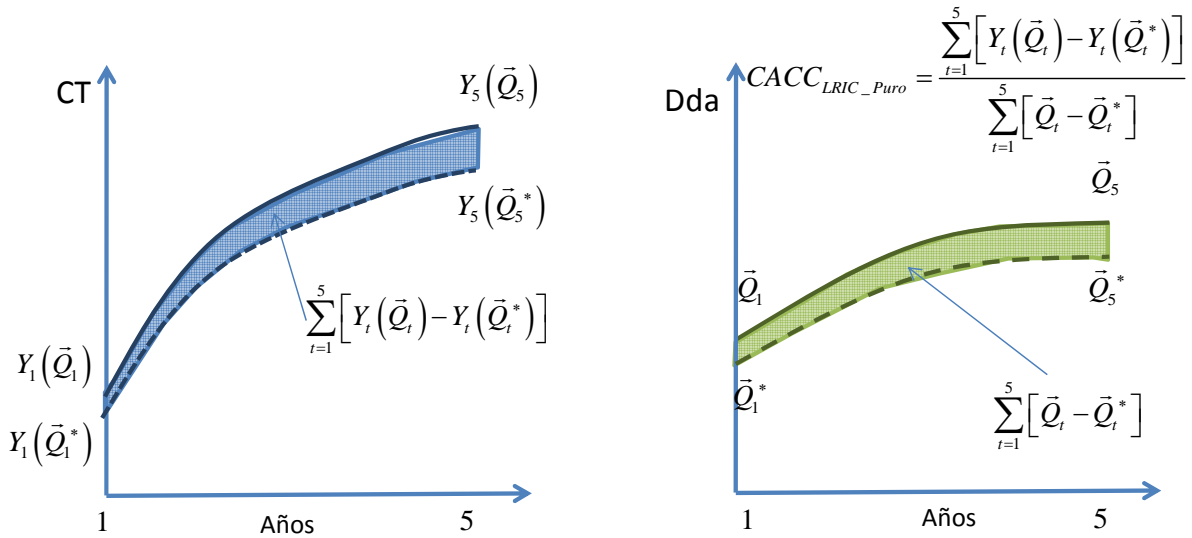


Ilustración 2: Esquema de Cálculo de Costo Incremental por Servicio, Total Service LRIC pure

Para el cálculo del LRIC puro la estrategia a seguir es muy simple, ya que se requieren sólo seis series de valores para el cálculo de esta tarifa, que se detallan a continuación:

- $Y_{n,t}$: Costo Total de Largo Plazo asociado al año t y el elemento n .
- $Q_{n,t}$: Demanda en términos de los activos para el activo n para el año t .
- $FR_{j,n}$: Factor de Ruteo para el elemento n y respecto al servicio j , obtenido con la demanda que contempla todos los servicios.
- $Y_{n,t}^j$: Costo Total de Largo Plazo asociado al año t y el elemento n , eliminando el servicio j .
- $Q_{n,t}^j$: Demanda en términos de los activos para el activo n para el año t , eliminando el servicio j .

De esta forma el valor del costo a remunerar por para el servicio a través de costo incremental por el servicio está dado por la siguiente fórmula.

$$P_{puro,j} = KT_j \sum_{n \in N} FR_{j,n} \left[\frac{\sum_{t=0}^5 \frac{Y_{n,t} - Y_{n,t}^j}{(1 + K_0)^t}}{\sum_{t=1}^5 \frac{Q_{n,t} - Q_{n,t}^j}{(1 + K_0)^t}} \right]$$

Donde:

- $P_{puro,j}$: Costo a Remunerar por el Servicio j a través del Costo incremental por servicio, LRIC puro.



En términos de la implementación en el modelo ésta es contenida en la hoja 'Cálculo.CI_Puro'.

CONCLUSIONES SOBRE LAS METODOLOGÍAS

Las metodologías de cálculo de remuneración de costos de interconexión o acceso que se han explorado en este trabajo son una con base en costos medios, formalmente costos totales de largo plazo, y tres con enfoques de costos incrementales o marginales, las cuales son: costos incremental de largo plazo por elementos o LRIC+, costo incremental por servicio o LRIC puro, y costo marginal de largo plazo.

En términos generales, saliendo del ámbito de análisis de costos que se utiliza en este proyecto, las metodologías pueden ser analizadas con respecto a su bondad en el contexto de la aplicación al mercado colombiano.

La evaluación de bondad de la aplicación a un determinado mercado, dependerá de la realidad de desarrollo del mismo, de las características que definen y diferencian cada una de las metodologías, y si estas son válidas en un contexto de desarrollo histórico del mercado en cuestión.

La utilización de metodologías con base en costo medio para la determinación de tarifas y/o cargos de interconexión, tiene asidero en la definición de precios y/o cargos (ya sea a usuarios finales o a otros operadores en el caso de cargos de acceso) que estén por sobre los costos marginales o incrementales, a fin de inducir señales económicas que incentiven la inversión en un determinado mercado.

Ahora bien, este argumento era absolutamente válido en un contexto de incipiente crecimiento del mercado de la telefonía móvil, en el cual aún no se había masificado el uso del servicio, y las empresas aún estaban en pujantes procesos de aumento de cobertura y calidad para la provisión del servicio de voz.

En la actualidad, el servicio de voz ya está masificado habiendo tasas de penetración en torno al 100%, y las redes tienen niveles de cobertura para el servicio de voz que llega a un ámbito nacional. Adicionalmente, la voz ya no es el único servicio que es el impulsor de las inversiones, ni tampoco de los ingresos de las compañías. Así, se ha conformado un entorno en el mercado en el cual la validez de la aplicación de metodologías con base en costos medios para la determinación de cargos de acceso se ve en tela de juicio, y la evaluación de la bondad de la metodología cambia en su foco.

En este contexto nace la oportunidad de evaluar la aplicación de metodologías de fijación de cargos de acceso con un foco en costos marginales, los matices de estas *metodologías de costo marginal* pueden ser muchos, pero a lo menos se pueden distinguir los ya mencionados costos incrementales por elemento, por servicio y marginales de largo plazo.

Es sabido, tanto en términos teóricos, con sustento en economía básica, como de la observación empírica de variados mercados, que las metodologías con base en costos marginales permiten hacer



una mejor discriminación de los precios y/o cargos lo cual es eficiente desde el punto de vista económico, puesto evita la existencia de subsidios cruzados, pudiéndose reflejar adecuadamente en cada precio de servicio y cargo de acceso los costos de provisión correspondientes, lo cual también lleva a la maximización del bienestar de la sociedad en conjunto (empresas y usuarios) e incluso evita que los problemas que trae la aplicación de costos medios se trasladen a los nuevos servicios de datos.

En términos ordinales, en el estado actual de desarrollo del mercado colombiano, los niveles de cargo de acceso obtenidos con una metodología a costo medio son mayores que los que se obtienen una metodología del tipo *costo marginal*. Así, con una medida de aplicación de niveles de cargo de acceso con base en costo marginal, una de las posibles medidas comerciales que podrían adoptar las empresas es subir los precios a llamadas salientes, intrared, y de ingreso al sistema. Así, uno de los posibles efectos será este aumento de precios. Posibilidad que no se ha demostrado a nivel internacional y que en el caso colombiano se estima menor.

Ahora, en forma alternativa, las empresas también tienen la opción de bajar los precios de llamadas salientes e intrared, a fin de capturar más usuarios, y en virtud de que la componente inherente al precio de llamadas salientes, relacionada con el cargo de acceso se ve disminuida. Lo anterior es una clara señal económica que podría inducir a un mayor nivel de competencia.

Ahora bien, un análisis tradicional de un entorno monopólico, como lo es el *monopolio de la red terminal*, que se conforma en la interconexión para intercambio de comunicaciones de voz, es insuficiente, debido a que en el entorno actual de desarrollo de mercado colombiano, no sólo se provee el servicio de voz en forma aislada, sino que se conjuga con la provisión de servicios de datos, en algunos casos provisión de servicios de arriendo de infraestructura a terceros, e incluso fusiones de empresas fijas y móviles, que permitirían inclusive incursionar en empaquetamiento de múltiples servicios.

En conclusión, debido a que: (i) la penetración del servicio de voz es bastante alta, y la cobertura de este servicio es a nivel nacional podría decirse que las señales económicas de metodologías con base en costo medio, que fijan cargos de acceso por sobre el costo marginal, han cumplido con los objetivos regulatorios iniciales, y (ii) adicionalmente, con el fin de introducir señales económicas de eficiencia, que permitan reflejar de mejor manera los costos atribuibles a los diferentes servicios, evitar subsidios cruzados, y también probablemente inducir un mayor impulso a la competencia, se puede afirmar que la introducción de un esquema de costos marginales es beneficiosa para el mercado colombiano, por lo cual los consultores se permiten recomendarla como una medida a ser aplicada en el mismo.

Con respecto a los matices en los cuales estas metodologías de costos marginales son entendidas, el análisis puede ser orientado a recomendar una metodología que refleje de mejor manera el fenómeno que quiere ser modelado. En términos prácticos, al entender de los consultores, el objetivo de una metodología del tipo *costo marginal*, para abordar de mejor manera un cambio desde un



entorno de costo medio, es aquella que represente de mejor manera el costo de la provisión del servicio que es sujeto de regulación, el cual es el cargo de acceso.

Las metodologías aludidas en las secciones anteriores de este informe son: costos incrementales de largo plazo por elemento, por servicio (o LRIC puro), y costos marginales de largo plazo. A continuación se exponen argumentos para la recomendación de los consultores:

- Los costos incrementales de largo plazo por elemento o LRIC+, es una metodología que se enfoca en la determinación de los costos diferenciados según el retiro de elementos de costos comunes en el primer año de modelación de la Empresa, de forma tal de modelar el crecimiento de ésta en elementos en el período de análisis en cuestión y obtener los costos unitarios por minuto que remuneran este aumento de demanda. Si bien esta es una metodología que permite obtener un proxy de los costos incrementales cuenta con grandes problemas de inestabilidad frente a variaciones de la demanda, y por ende a los años considerados para la recuperación de los costos, no entregando una herramienta robusta para el cálculo de un costo marginal.
- Los costos marginales de largo plazo, al igual que los costos incrementales por elemento se enfocan a la caracterización de los costos variables en conjunto, en efecto en términos matemáticos la caracterización de los costos variables que se obtiene del modelo puede ser representada en términos funcionales explícitos a través de esta metodología. Si bien ésta metodología resulta acertada en el cálculo del costo marginal de los servicios cuenta con el problema normativo de ser dependiente del punto donde se evalúe el costo marginal y del rango de variación de los componentes de la demanda, lo cual no lo convierte en un instrumento ideal para una fijación de cargos de acceso, mas si establece un excelente punto de referencia para el valor del LRIC puro, ya que en la mayoría de los casos el cálculo del costo marginal de largo plazo es menor y muy cercano al valor del LRIC puro.
- Finalmente los costos incrementales de largo plazo por servicio o LRIC puro, logran justamente reflejar de manera precisa aquellos costos que son efectivamente atribuibles al cargo de acceso. Puesto que la metodología, tal como ya se explicó, estima este costo mediante la estimación del costo total con todos los servicios, y luego el costo total, pero sin la inclusión del servicio, y estima el costo del servicio en sí, a través de la diferencia entre los dos anteriores.

Ahora, bien a pesar que en términos teóricos, esta metodología implica la eliminación de los costos de overhead relacionados con el servicio de interconexión, al entender de los consultores, esta consideración es errada puesto que pasaría por alto la naturaleza del fenómeno que se quiere representar, específicamente implicaría por ejemplo la eliminación de costos que se dedican en forma exclusiva a la provisión del servicio de acceso, como lo son los costos relacionados con las gerencias de interconexión, como personas y edificios. Por esta razón, en la modelación que se presenta en los siguientes numerales, estos costos sí son tenidos en cuenta.



En conclusión, con los antecedentes anteriormente expuestos, para efectos de una eventual transición entre metodologías de determinación de cargos de acceso con base en costos medios a una con base en costos marginales, escoger de entre las metodologías de costo marginal aquella que refleje de buena manera la provisión del servicio que está siendo sujeto de regulación, como lo es el tráfico de acceso o entrante, y esta metodología es la de costos incrementales de largo plazo por servicio o LRIC puro. Ahora bien, se recomienda adicionalmente tomar en consideración e incluir en este cálculo aquellos costos de overhead que tienen relación directa con el servicio de acceso, por la simple razón que ante la inexistencia del servicio estas funciones administrativas no existirían.



DESCRIPCIÓN DEL MODELO LRIC PURO

Este capítulo se divide en dos partes. La primera parte es la referida a la revisión de las funciones de costos del modelo actual, llevándolas a un contexto más general en vista del cálculo de a través de la metodología LRIC puro. La segunda parte es la referida al cálculo de parámetros considerados como demanda en el modelo, es decir las estimaciones y proyecciones de abonados y tráfico, y el cálculo de la cobertura actual por empresa.

REVISIÓN DE LAS FUNCIONES DE COSTO

La determinación de los valores de remuneración de costos y/o cargos de acceso, con base en costos medios tiene un foco importante en la adecuada definición de costos totales de una empresa, debido justamente a que la tarifa, en términos muy simplificados, corresponde a la razón entre los costos totales y la demanda total. En este contexto, la obtención de resultados de costos totales que reflejen realidades similares y un poco inferiores a la empresa real, avalará en cierta medida el cargo de acceso obtenido con modelos orientados a costos medios.

Por su parte, en un contexto de costos marginales, incrementales o de *LRIC puro* (*TSLRIC: Total Service Long Run Incremental Cost*), si bien una buena estimación de los costos totales sigue siendo importante, no es suficiente para reflejar de forma adecuada los cargos de acceso. En este ámbito evidentemente también se hace relevante la pendiente de la curva de los costos totales, debido a que justamente es esta la que define el nivel tarifario y/o de cargo de acceso.

El modelo de costos para la determinación de cargos de acceso original que dispone la CRC, determina los cargos de interconexión con costos totales de largo plazo (*costos medios*). En este sentido, el enfoque de dicho modelo está orientado a la determinación de los costos totales de provisión del servicio, en efecto dicho modelo tiene una marcada tendencia a considerar en forma explícita las indivisibilidades en el desarrollo de ciertas partes componentes de una empresa eficiente, como por ejemplo el equipamiento de las redes. Lo anterior, en un contexto de costos medios, se convierte en una fortaleza de la modelación, debido a que representa de mejor manera la realidad del despliegue de las redes de la empresa eficiente, y en general los costos de los proyectos de reposición. Sin embargo, en un contexto de costos marginales, incrementales o de LRIC puro esta característica se torna inadecuada en un contexto de análisis de diferencial de las tarifas y/o cargos de acceso.

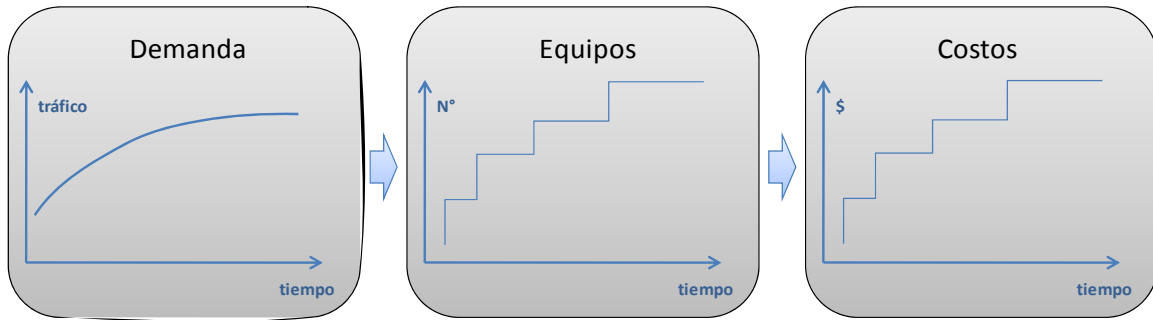


Ilustración 3: Esquema explicativo del fenómeno

El análisis de variaciones frente a cambios a la demanda se torna importante, debido a que en términos de cumplimiento de objetivos regulatorios, y para dar mayor solidez al desarrollo del mercado, es deseable que la herramienta que calcule los costos marginales sea robusta ante variaciones de la demanda. Conseguir lo anterior en el modelo original se torna complejo, en un contexto en que las funciones de costo de dicho modelo consideran las indivisibilidades anteriormente aludidas.

En términos generales existen variadas alternativas para propiciar que la herramienta de cálculo (el modelo) sea robusto ante variaciones de la demanda, como por ejemplo: (i) utilización de curvas de costo, (ii) consideración de costos de inversión inicial y adiciones expansiones, o (iii) segmentaciones de la actual estructura de costos.

Todas las alternativas presentan virtudes y dificultades en la justificación de su aplicación e implementación:

- La utilización de **curvas de costo** es muy apropiada para efectos de representar variaciones frente a la demanda, sin embargo, tiene poca justificación práctica, debido al hecho que el desarrollo de despliegue de equipos y proyectos de reposición en la práctica no tiene dicha forma funcional, y también es muy difícil justificar con base en costos reales el segmento continuo de valores que toma estas funciones.

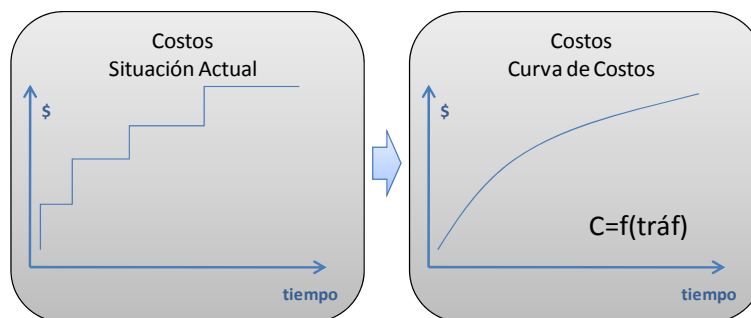


Ilustración 4: Cambio en los costos entre el esquema actual y la utilización de curvas de costo

- La consideración de **costos de inversión inicial y adiciones o expansiones** es una alternativa que si bien tiene mucha relación con la realidad, y aminora el efecto de indivisibilidad de los costos, sin embargo, no los elimina completamente, adicionalmente requiere de información nueva, la cual no ha sido provista por las empresas.

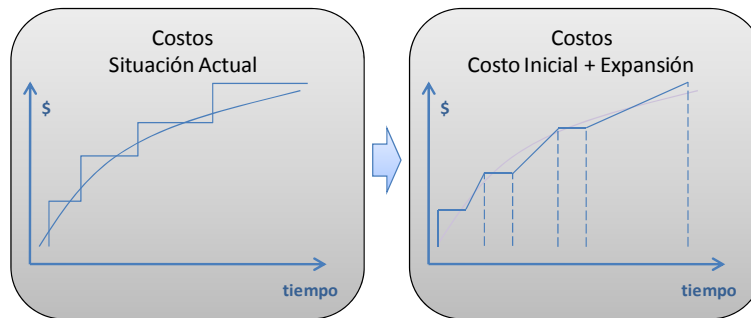


Ilustración 5: Cambio en los costos entre el esquema actual y la utilización de costos de inversión inicial y expansiones.

- La utilización de una **segmentación de la estructura actual de costos** es una alternativa que se aleja comparativamente de la realidad con respecto a la situación original, sin embargo utiliza la información real actual disponible para acercarse a un esquema con expansiones de capacidad.

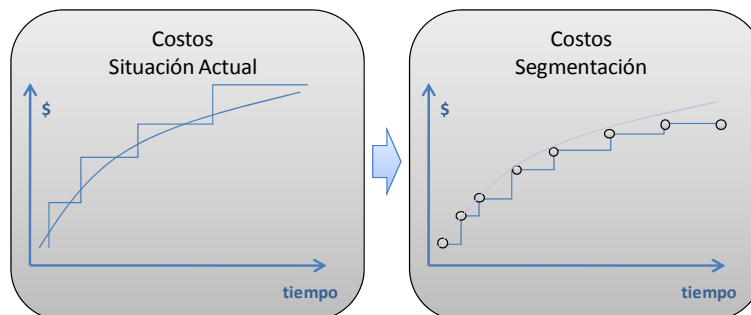


Ilustración 6: Cambio en los costos entre el esquema actual y la utilización de segmentación de costos.

La recomendación de los consultores es utilizar una segmentación de la estructura actual de costos, las razones son las siguientes: (i) se sigue utilizando como base la información disponible de costos unitarios, los cuales además de ya haber sido utilizados en otros procesos regulatorios, reflejan de manera adecuada los costos reales de empresas de telecomunicaciones en la región, (ii) aminora, con respecto a la situación original, el efecto de las indivisibilidades de costos, puesto que los escalones de costo son menores, (iii) es una manera cercana o alternativa de emular expansiones de las capacidades de los equipos, la cual es realizada con base en información real.



Las modificaciones introducidas al módulo de red, en pos de obtener respuestas más robustas del diseño de red, ante variaciones de la demanda son las siguientes: modificación de las funciones de costos de los equipos BSC, MGW, y MSCS, modificación del dimensionamiento de los enlaces entre MGW y los puntos de terminación de red, y la modificación de la aplicación de los factores de utilización de todos los equipos de red. Las modificaciones anteriormente aludidas se explican en las siguientes secciones del presente capítulo.

Es importante mencionar que, adicionalmente a los puntos anteriormente aludidos, se ha actualizado y por ende modificado los valores unitarios de inversión y gastos para los principales impulsores de costos del modelo, en su parte relacionada con el diseño de red. Esta actualización es bastante simple, y corresponde a la simple corrección de precios en términos temporales, considerando que la fuente original desde donde se han provisto los mismos es del mercado chileno. En términos específicos se aproximó una composición promedio de los componentes de inversión y gasto del módulo de red; con base en modelos de empresa eficiente de Chile; entre los efectos de inflación y variaciones de precios al por mayor del mismo país, y se aplicó un factor equivalente a dicha variación al vector de costos unitarios en la hoja del mismo nombre del modelo.

MODIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES DE COSTOS DE LOS EQUIPOS BSC, MGW Y MSCS

En términos específicos dentro del modelo se aplicó esta modificación a la determinación de los siguientes elementos o impulsores de costos BSC, MGW y MSCS. Lo anterior no sólo impacta los costos directo de los aludidos elementos de red, sino que debido a que son impulsores generales de costos en modelo, también tienen efectos en los costos de inversión y de operación en dichos elementos de red (impulsores o *drivers*) y sus costos dependientes.

En términos de modelación la determinación de la cantidad de los aludidos equipos se realiza con una programación dinámica con respecto a la demanda. En este sentido la formulación matemática se muestra a continuación.

$Z = \{z_1, \dots, z_{|Z|}\}$: Conjunto de zonas geográficas o departamentos

$E = \{e_1, \dots, e_{|E|}\}$: Conjunto de escenarios modelados (empresas)

$T = \{a_1, \dots, a_{|T|}\}$: Conjunto de períodos o años consideradores en la evaluación (5)

$M = \{m_1, \dots, m_{|M|}\}$: Conjunto de tipos de equipo

$demanda.equipo_{z,t,e}$: Demanda en la zona, período y escenario (z, t, e)

$utilización.equipo_t$: Porcentaje de utilización del equipo en t



$equipo.completa_{m,t}$: Cantidad de equipos para la red completa del tipo y período
(m, t)

$capacidad.equipo_m$: Capacidad del equipo tipo m

A modo de hacer más explícito el ejemplo, se debe consignar que en las definiciones anteriores, "equipo" es aplicable para BSC, MGW, y MSCS. Adicionalmente, sin pérdida de generalidad, y para efectos explicativos, considérese el caso particular del equipo MGW, con tres diferentes capacidades o tipos, un período de cinco años y se omitirá la referencia a zonas y escenarios, específicamente:

$$demanda.equipo_{z,t,e} = tráfico.mgw_t$$

$$utilización.equipo_t = utilización.mgw_t$$

$$equipo.completa_{m,t} = mgw.completa_{m,t}$$

$$capacidad.equipo_m = capacidad.mgw_m$$

$$M = \{m_1, \dots, m_{|M|}\} = \{MGW1, MGW2, MGW3\}$$

$$T = \{año0, \dots, año5\}$$

Así, la metodología de programación dinámica para determinar la cantidad de equipos (MGW) en cada año del horizonte de evaluación será. Recuérdese que esta metodología sigue siendo válida para todos los escenarios, diferentes cantidades de tipos de equipos, todos los departamentos (zonas geográficas), y también todos los escenarios (empresa eficiente, Comcel, Movistar y Tigo):

$$aux.mgw_{MGW3,año5} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{tráfico.mgw_{año5}}{capacidad.mgw_{MGW3} \times utilización.mgw_{año5}} - \left[\frac{tráfico.mgw_{año5}}{capacidad.mgw_{BSC3} \times utilización.mgw_{año5}} \right] > \frac{capacidad.mgw_{MGW2}}{capacidad.mgw_{MGW3}} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$mgw.completa_{MGW3,año5} = \left\lceil \frac{tráfico.mgw_{año5}}{capacidad.mgw_{MGW3} \times utilización.mgw_{año5}} \right\rceil + aux.mgw_{MGW3,año5}$$

$$mgw.completa_{MGW2,año5} = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{tráfico.mgw_{año5}}{utilización.mgw_{año5}} - capacidad.mgw_{MGW3} \times mgw.completa_{MGW3,año5} > capacidad.mgw_{MGW1} \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$mgw.completa_{MGW1,año5} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=\{2,3\}} (capacidad.mgw_{MGWi} \times mgw.completa_{MGWi,año5}) < \frac{tráfico.mgw_{año5}}{utilización.mgw_{año5}} \\ 0 & \sim \end{cases}$$



$$aux.mgw_{i,t} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum_{m \neq i} (capacidad.mgw_m \times mgw.completa_{m,t+1}) > \frac{tráfico.mgw_i}{utilización.mgw_i} \\ 1 & \sim \end{cases}$$

$$mgw.completa_{i,t} = tráfico.mgw_i \times aux.mgw_{i,t}$$

$$t = \{\text{año}0, \dots, \text{año}4\}$$

$$i = \{MGW1, MGW2\}$$

$$cond.aux.mgw = \sum_{i=\{1,2\}} capacidad.mgw_{MGWi} \times mgw.completa_{MGWi,t} + capacidad.mgw_{MGW4} \times (mgw.completa_{MGW3,t+1} - 1) \geq \frac{tráfico.mgw_i}{utilización.mgw_i}$$

$$mgw.completa_{MGW3,t} = \begin{cases} mgw.completa_{MGW3,t+1} - 1 & \text{Si } cond.aux.mgw \\ mgw.completa_{MGW3,t+1} & \sim \end{cases}$$

$$t = \{\text{año}0, \dots, \text{año}4\}$$

A esta metodología se le realizó una modificación, la cual en términos matemáticos radica en el aumento en la cardinalidad del conjunto de tipos de equipos, y en términos de modelación implica modificar las estructuras del módulo de diseño de red en su parte del diseño de la red núcleo, como también elementos de costos en el módulo de cálculo tarifario. Específicamente, en las siguientes expresiones se resume las variaciones a la cardinalidad de los conjuntos anteriormente aludidos.

$$Tipo_{BSC} = \{1, \dots, 4\} \rightarrow Tipos_{BSC} = \{1, \dots, 12\}$$

$$Tipo_{MGW} = \{1, \dots, 4\} \rightarrow Tipos_{MGW} = \{1, \dots, 12\}$$

$$Tipo_{MSCS} = \{1, \dots, 4\} \rightarrow Tipos_{MSCS} = \{1, \dots, 12\}$$

MODIFICACIÓN DE LA METODOLOGÍA DE DIMENSIONAMIENTO DE LOS ENLACES ENTRE MGW Y LOS PUNTOS DE TERMINACIÓN DE RED

La actual metodología de dimensionamiento de los enlaces entre equipos MGW y los puntos de terminación de red propicia la construcción de enlaces con holguras, debido a la modularidad de las diferentes jerarquías de transmisión consideradas, en particular E1, E2, 2E2 y E3. En este sentido, ante pequeñas variaciones en la demanda era posible que se propiciase la construcción de enlaces de jerarquía mayor (2E2 o E3) los cuales presentan una holgura, lo anterior, si bien refleja en forma adecuada la realidad, en el sentido que las empresas al hacer una planificación de largo plazo podrían desarrollar enlaces de mayor jerarquía, por otra parte introduce las ya mencionadas indivisibilidades de los costos y por ende discontinuidades que inciden en irregularidad de los valores de cargo de acceso ante variaciones de la demanda.

En términos matemáticos la metodología del modelo original sigue las siguientes formas funcionales:

El procedimiento de cálculo de la cantidad de enlaces entre MGW y POI (o PTR, entiéndase como punto de terminación de red o *Point of Interconnection*) comienza con la determinación del tráfico



promedio por POI. Luego, a partir de la información anterior y la información de capacidad de dichos enlaces, se procede a determinar la cantidad de enlaces entre conmutadores. A continuación se describe matemáticamente dicha metodología.

$tráfico.mgw_ptr.por.ptr_{z,t}$: Tráfico en Erlang entre MSC – PTR por PTR zona z , en t .

$tráfico.mgw_ptr_{z,t}$: Tráfico en Erlang entre MSC en zona z , en t .

$ptr.fija_{z,t}$: Cantidad de PTR a redes fijas.

$ptr.móvil_{z,t}$: Cantidad de PTR a redes móviles.

$ptr.ld_{z,t}$: Cantidad de PTR a portadores de larga distancia.

$ptr.total_{z,t}$: Cantidad total de PTR.

$$ptr.total_{z,t} = ptr.fija_{z,t} + ptr.móvil_{z,t} + ptr.ld_{z,t}$$

$$tráfico.mgw_ptr.por.ptr_{z,t} = \frac{tráfico.mgw_ptr_{z,t}}{ptr.total_{z,t}}$$

$tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,e}$: Cantidad bruta de enlaces tipo e por PTR, para la zona z , en t .

$erlang.por.enlace_e$: Capacidad en Erlang de enlace tipo e .

$utilización.tx_mgw_ptr_t$: Utilización enlace de transmisión entre MGW y PRT.

$tx.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,e}$: Cantidad efectiva de enlaces tipo e por PTR, para la zona z , en t .

$tx.mgw_ptr_{z,t,e}$: Cantidad efectiva de enlaces tipo e , para la zona z , en t .

$$tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,e} = \max \left\{ 1, \left[\frac{tráfico.mgw_ptr.por.ptr_{z,t}}{erlang.por.enlace_e \times utilización.tx_mgw_ptr_t} \right] \right\}$$

$$tx.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E1} = \begin{cases} 0 & \text{si } tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E1} > 1 \\ 1 & \sim \end{cases}$$

$$tx.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E2} = \begin{cases} 0 & \text{si } tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E1} = 1 \vee tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E} > 1 \\ 1 & \sim \end{cases}$$



$$tx.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,2 \times E2} = \begin{cases} 0 & \text{si } tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,(E1 \vee E2)} = 1 \vee tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,2 \times E2} > 1 \\ 1 & \sim \end{cases}$$

$$tx.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E3} = \begin{cases} 0 & \text{si } tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,(E1 \vee E2 \vee 2E2)} = 1 \vee tx.bruta.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,E3} > 1 \\ 1 & \sim \end{cases}$$

$$tx.mgw_ptr_{z,t,e} = tx.mgw_ptr.por.ptr_{z,t,e} \times ptr.total_{z,t}$$

La metodología anteriormente descrita fue modificada, en el siguiente aspecto, se consideró un diseño paralelo con base en sólo E1, es decir se eliminó el uso de E2, 2E2 y E3, y con base en dicha nueva configuración, esa cantidad de E1 fue pagada en proporción a los correspondientes enlaces según jerarquía que indicaba la metodología original. La modificación anterior, sigue utilizando una estructura de costos que refleja decrementos a escala, es decir el costo unitario a medida que se compran más equipos es mayor, y adicionalmente aminora el efecto de las indivisibilidades de costo. Lo anterior es válido sólo en un contexto en el que se contemple arrendamiento de esta infraestructura, tal como se usa en el modelo. En un ambiente genérico en cual se pueda propiciar también inversiones, la metodología original es la más apropiada.

MODIFICACIÓN EN LA APLICACIÓN DE LOS FACTORES DE UTILIZACIÓN DE TODOS LOS EQUIPOS DE RED

Los factores de utilización de los elementos, impulsores o *drivers* del módulo de red son instrumentos que sirven para aproximar la metodología de diseño primaria que se usa en el modelo, que es del tipo "green field", a la realidad de despliegue de redes que realizan los operadores.

Los cálculos de los factores de utilización de los elementos de la red están contenidos en la hoja homónima del modelo. Estos factores, debido a su naturaleza y función, inciden en un diseño de red con una mayor cantidad de elementos que el caso de una red ideal. Lo anterior se debe a que dichos factores representan las ineludibles ineficiencias en el diseño en la que incurren los operadores. Estas ineficiencias son: (i) el uso máximo de los equipos de electrónica es menor al 100%, lo cual tiene asidero en la naturaleza de dichos equipos, y es avalado por las recomendaciones de los proveedores de los mismos, (ii) por causa de las características geográficas del terreno donde se despliega la red, el comportamiento de la población, el desarrollo del entorno urbano, este efecto también se le denomina *scorched node* y (iii) los tiempos de realización de las tareas de compra, instalación y puesta en marcha de equipos.

- i. Uso máximo de los equipos: es el porcentaje de la capacidad disponible indicada por el fabricante del elemento de red a la cual es utilizado el equipo o elemento de red en cuestión.
- ii. Scorched Node: corresponde al porcentaje de la capacidad del equipo que es utilizado en forma efectiva luego haberse efectuado el diseño. Pretende representar las posibles ineficiencias en el diseño ideal de la red, causadas por la evolución del entorno de diseño, como lo son el crecimiento de las ciudades, construcción de nuevos edificios, cambios en los hábitos de movilidad de usuarios, entre otras.
- iii. Planificación: Corresponde al período que se considera para planificar las inversiones. Así, si se quiere diseñar la instalación de un elemento de red, se considerará la predicción de la demanda que dimensione dicho elemento de red, en el momento especificado por el tiempo actual más el período de planificación. Pretende representar el período necesario para planificar la instalación y poner en servicio el elemento de red en cuestión.

La aplicación de estos factores en el modelo original, es en términos interanuales, y produce cambios en la curvatura de la demanda de diseño, con la cual se realiza al cálculo de la cantidad de elementos de red, así existirán variaciones también en la curva de costos, y subsecuentemente en los costos marginales y el nivel de cargo de acceso que sea determinado con alguna metodología diferencial, como por ejemplo LRIC puro. A modo de seguir considerando este efecto, más no inducir cambios en la curvatura de los costos totales, se ha optado por aplicar en forma uniforme el valor promedio de las utilidades a lo largo de todo el período de planificación.

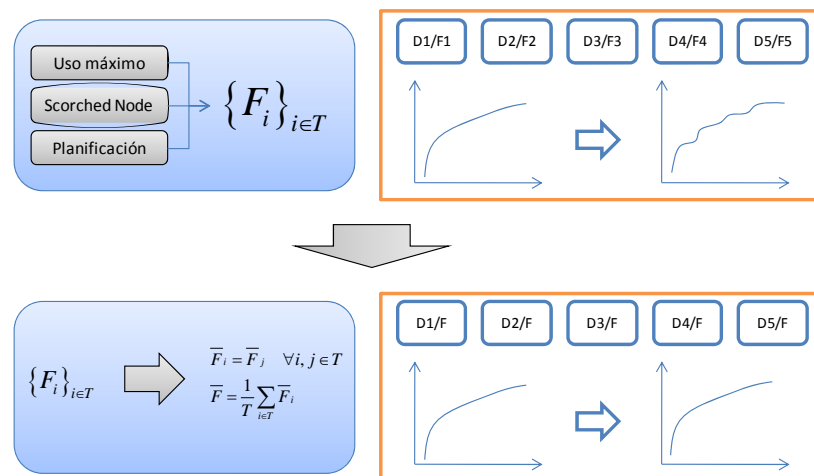


Ilustración 7: Esquema de la modificación de los factores de utilización

ESTIMACIÓN DE DEMANDA

A continuación se analizarán los temas referidos a las proyecciones de demanda, tanto la proyección referida a los abonados como la proyección de tráfico de la industria.



DEMANDA DE ABONADOS

Para definir el modelo econométrico a utilizar para analizar la demanda de líneas o abonados de telefonía móvil, utilizaremos la notación que se explica a continuación. Para un año $t \in T$, definimos como POB_t a la población de Colombia y definimos como A_t al número de abonados. Con estas definiciones podemos establecer la **penetración** como:

$$PEN_t = \frac{A_t}{POB_t}$$

Notemos que los valores anteriores serán positivos y eventualmente mayores que la unidad, considerando la existencia de abonados con dos o más aparatos telefónicos móviles, y en vista de penetraciones alcanzadas por otros países. Por otra parte las penetraciones también serán menores a 1 para un mercado en expansión, es decir, para un mercado que se encuentra en la fase cóncava de una curva S de adopción tecnológica, lo cual no es aplicable para el caso colombiano, que podría ser considerado un mercado maduro para estos efectos.

Sea además SE_t un vector de característica socio-económicas agregadas a nivel de país. Dentro de las series consideradas para ésta proyección se encuentra el PIB, el PIB per cápita estandarizado y la penetración del servicio de telefonía fija, todas series con la historia suficiente para realizar proyecciones. En adelante, y para efectos de exposición, suprimimos el subíndice temporal t, entendiendo que nos encontramos ante una modelación de series de tiempo.

Para efectos de estimar y proyectar el número de abonados, en la literatura existen dos modelos básicos que se han utilizado para analizar la penetración telefónica, a saber, el **logístico** y aquel de **curvas de penetración S**.

El modelo **logístico más simple** que uno puede estimar, asume que la penetración del servicio móvil está explicada por una forma **logística** según la siguiente expresión:

$$PEN = \frac{1}{1 + e^{-\beta' \cdot SE}}$$

donde β es un vector de parámetros a estimar. La popularidad de este modelo radica en que una transformación simple lo reduce a un modelo lineal, que es posible estimar con técnicas de regresión tradicionales. En particular

$$\ln \left| \frac{PEN}{1 - PEN} \right| = \beta' \cdot SE$$

Sin embargo, para estimar el comportamiento de la penetración en telefonía móvil, el modelo logístico anterior asume implícitamente que la tasa de penetración alcanzará el 100% en el largo



plazo³, lo que a priori es una restricción importante en la modelación, especialmente en el caso de Colombia donde en la actualidad este valor de penetración muy probablemente ya ha sido superado. Para corregir lo anterior, un modelo menos restrictivo considera una función **logística generalizada** que, en su expresión más simple, es de la forma

$$PEN = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\beta \cdot SE}}$$

Bajo la especificación anterior, PEN es creciente en $\|SE\|$ y cuando $\|SE\| \rightarrow +\infty$ se tiene que

$PEN \rightarrow \frac{1}{\alpha_1}$, razón por la cual,

$$PENLP = \frac{1}{\alpha_1}$$

se considera como la penetración de largo plazo del servicio en cuestión. De esta manera, el modelo logístico tradicional es un caso particular del modelo generalizado anterior, pues en tal caso se tiene $PENLP = 1$.

La desventaja del modelo logístico generalizado viene del hecho que, para efectos de estimación, no es posible realizar una transformación de las variables y obtener un modelo lineal y que, por otro lado, el valor de largo plazo, PENLP, es un dato exógeno que debe ser impuesto en la estimación. Por lo tanto, este modelo debe ser estimado con técnicas econométricas no estándares (como Mínimos Cuadrados No-Lineales o Máxima Verosimilitud), o con restricciones sobre alguno de sus coeficientes (penetración de largo plazo exógena).

En línea con lo anterior, otra alternativa de modelación es seguir un modelo a la Gompertz. A diferencia del modelo logístico generalizado, el modelo a la Gompertz asume que la penetración de servicios crece más aceleradamente al comienzo y más lentamente al final del periodo. La especificación sencilla de este modelo es:

$$PEN = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot e^{-\beta \cdot SE}$$

De esta manera, en el largo plazo la tasa de penetración tiende $PENLP = \alpha_0$.

En el análisis se probó los modelos logísticos generalizados, principalmente siguiendo la línea de los modelos anteriormente estimados en el mercado Colombiano. Dependiendo de las técnicas de estimación utilizadas (OLS, NLLS), se obtienen diversos resultados en cuanto a la bondad de ajuste de

³ Si una de las variables en el vector SE es una tendencia temporal o ingreso nacional que crece indefinidamente, en el largo plazo PEN obviamente llegará a 100%, bajo esta ecuación.



cada modelo con los datos reales, así como su capacidad para realizar proyecciones fuera de muestra. El modelo que finalmente se utilizó es con el que se logró una buena representación de los datos actuales (el cuál se testeará observando la bondad de ajuste del modelo, un test de especificación de Ramsey y el comportamiento de los errores que resulten del mismo, y si presentan o no Auto Correlación, mediante un test de Ljung Box). Además deberá producir parámetros estables (tests CUSUM) y el menor error cuadrático medio de predicción fuera de muestra.

Sobre lo anterior, notemos lo siguiente:

- a. En ninguna de las especificaciones ya descritas se ha considerado las características de la oferta como determinantes de la penetración de los servicios móviles: en el modelo simple, sólo las características socio-económicas agregadas de la población determinarían la tasa de penetración de los servicios. Así, en particular, el efecto de los precios de los servicios móviles ha sido obviado en dicho análisis. Esto principalmente, porque en la práctica no está disponible una base de datos de demanda desagregada, donde pueda vincularse tráfico efectuado con planes y precios existentes, a lo más se cuenta con un efecto global, donde se mezclan entre otras variedades de planes y consumos, así como precios en dos partes.
- b. La penetración de largo plazo es un dato exógeno que debe ser provisto al modelo, razón por la cual se debe acordar un valor con la contraparte del estudio, esto a partir de una sugerencia fundada de este equipo consultor.
- c. La proyección de los valores de penetración de los servicios para el horizonte de modelación presupone un acuerdo con la contraparte sobre los valores de las variables socio-económicas consideradas en la modelación. Estas variables (PIB, Población, etc.) son provistas por la contraparte del estudio.
- d. En el análisis anterior no se ha considerado el posible efecto que el desarrollo de la telefonía fija podría tener sobre la demanda móvil. Efectivamente una sustitución positiva, negativa o neutra de ambos servicios podría afectar los resultados de la estimación propuesta. Por otra parte es importante recalcar que éste problema es complejo de considerar, ya que presupone estimar un modelo de demanda conjunto (simultáneo) fijo – móvil, donde las variables del lado derecho de la ecuación no sean las mismas para las ecuaciones consideradas.
- e. En la proyección no se considerarán los posibles efectos de la implementación de medidas de mercado como la portabilidad. Las cuales presentan según varios organismos internacionales (OECD, 2009) beneficios a nivel de competencia de mercado, más los efectos sobre la penetración del servicio no entregan resultados concluyentes en el sentido de aumentar o disminuir la penetración.
- f. En el análisis se considerará que la proporción entre los usuarios de prepago y contrato permanecerá constante, así como sus participaciones de mercado. El punto anterior asume de fondo que el comportamiento comercial de las empresas no sufre mayores cambios, es decir, que éstas no se vuelcan hacia un proceso de enriquecimiento o depuración de su cartera de clientes,



consiguiendo clientes de alto tráfico, como los de servicio de contrato o postpago, si no que siguen con la apuesta comercial de ofrecer una mayor cantidad de universo de potenciales receptores de llamadas como lo son los prepagos. Para estimar este tipo de modelos, donde exista el efecto de depuración, es necesario contar con una base de datos muy exacta de precios y planes, a nivel de microdatos, donde luego se pueden utilizar modelos de estimación anidada de modelos logísticos, o modelos a la *Mc Fadden*.

Por estas razones de modelación la ecuación a estimar es:

$$-\ln\left(\frac{1}{PEN} - \alpha_1\right) = \beta \cdot SE + \ln(\alpha_2)$$

De esta forma el modelo obtenido a través de un proceso de eliminación de variables redundantes sólo dejó como resultado de variables relevantes la penetración transformada con un rezago, el PIB per cápita con un rezago, la penetración del año pasado y una variable dummy asociada al cambio de medición de los usuarios activos de prepago, efecto que se detectó para los tres primeros trimestres del año 2009, tal como se puede apreciar en la siguiente tabla, donde se adoptó como

variable $PEN110 = -\ln\left(\frac{1}{PEN} - \frac{1}{110\%}\right)$.

Tabla 1: Modelo de Penetración de Abonados

Sample (adjusted): 2001Q1 2009Q4
Included observations: 36 after adjustments
HAC standard errors & covariance (Bartlett kernel, Newey-West fixed bandwidth = 4.0000)

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
PEN110(-1)	1.152731	0.060016	19.20701	0.0000
PEN110(-4)	-0.147664	0.059804	-2.469125	0.0191
PIBPCR(-1)	0.016165	0.004293	3.765519	0.0007
DUMMY	-0.226996	0.050499	-4.495025	0.0001
R-squared	0.997731	Mean dependent var		-0.498331
Adjusted R-squared	0.997519	S.D. dependent var		1.552821
S.E. of regression	0.077352	Akaike info criterion		-2.176462
Sum squared resid	0.191466	Schwarz criterion		-2.000516
Log likelihood	43.17632	Hannan-Quinn criter.		-2.115052
Durbin-Watson stat	1.443768			

Además de lo anterior el modelo que presentó los mejores resultados en estimación fuera de la muestra fue el de penetración de largo plazo de 110%, y la utilización del valor del crecimiento del PIB per cápita nominal del 0.31% inter-trimestral, el cual fue el promedio del año 2009, por lo cual la predicción de crecimiento del mercado es bastante mesurada. Por otra parte para la estimación de la

población se utilizó la estimación oficial del DANE. Gráficamente los resultados de la proyección de demanda se pueden apreciar en la Ilustración 8.

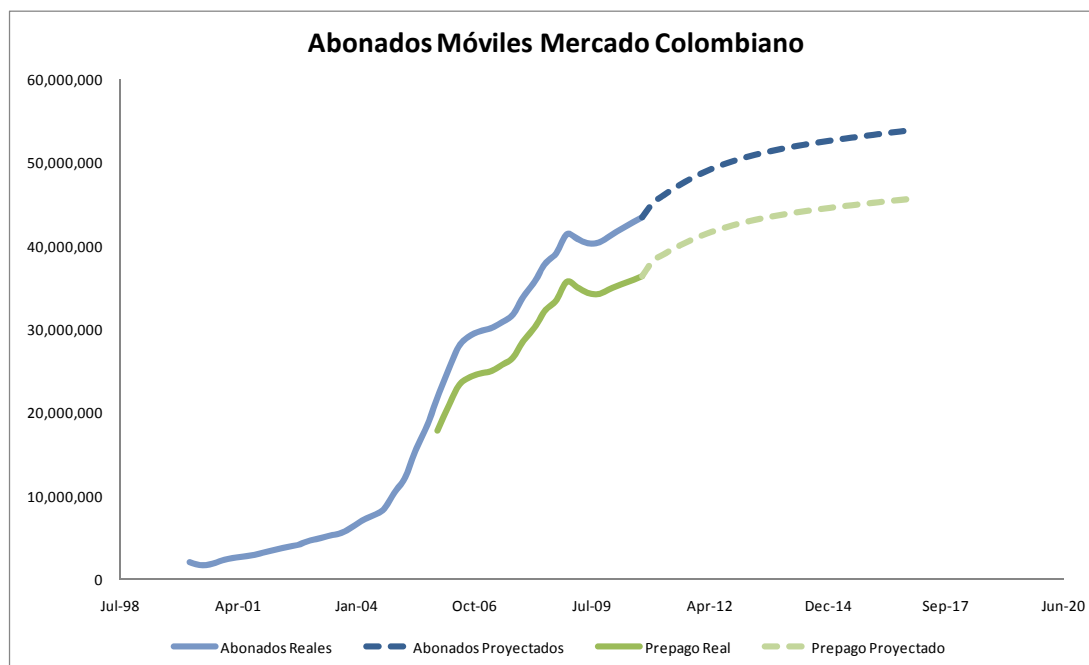


Ilustración 8: Proyección de Demanda para el Mercado Colombiano

De esta forma el modelo alcanza la penetración del un 109,85% al final del período de estudio, esto es Diciembre del 2015.

En lo referente a la proporción entre prepago y contrato las participaciones de mercado de las empresas, se optó por tomar el promedio del último año para el valor de ambos valores. Esto por las razones esgrimidas con anterioridad.

DEMANDA DE TRÁFICO MÓVIL

Para la estimación de demanda por tráfico móvil se contó con la información provista por la CRC, la cual consiste en la serie mensual de tráfico entre enero del año 2007 y septiembre del año 2010 completando casi 3 años de datos. La data en términos generales resulta de una tendencia muy variable⁴, especialmente en lo referente al tráfico dentro de la red, ya que en período se aprecian grandes cambios en los comportamientos en el tráfico de los usuarios, los cuales se podrían deber a fuertes cambios en las ofertas comerciales de las empresas, o a cambios estratégicos seguidos por ellas por ejemplo como el cambio impulsado por Movistar el año 2008(CRC, 2010), el cual llevó a la empresa a volcar su estrategia hacia la no discriminación de precios entre redes, o la seguida por Comcel que lo llevó a cerrar más cartera de clientes, a pesar de los esfuerzos por parte del regulador.

⁴ Especialmente en lo observado entre los años 2008 y 2009

La familia de modelos utilizados para el proceso de estimación fueron básicamente los modelos autoregresivos univariados y modelos autorregresivos multivariados. Debido en parte a la carencia de variables que pudiesen explicar las fluctuaciones del mercado de voz móvil, los modelos resultantes fueron por excelencia los modelos autorregresivos univariados. De esta forma la ecuación a estimar fue la siguiente:

$$y_{t,j}^p = \sum_{k=1}^L \delta_{k,j}^p y_{t-k,j}^p + \sum_{k=1}^L \rho_{k,j}^p d_k y_{t-k,j}^p + \delta_{0,j}^p + \varepsilon_{t,j}^p$$

Siendo $y_{t,j}^p$ el valor del logaritmo natural de los minutos por usuario mensuales para la empresa j y el tráfico p , en un instante t , estimado con un número máximo de L retrasos de la serie. Donde las los coeficientes a estimar son los valores de $\delta_{k,j}^p$ y $\rho_{k,j}^p$, los cuales están asociados a la variable y y a la variable con el efecto estacional modelado por una dummy que da cuenta del mes, como es común en las estimaciones mensuales con estacionalidad.

Dentro de las consideraciones referidas a la estimación de tráfico es necesario recalcar las siguientes:

- a. La estimación de tráfico no contempló el tráfico entrante desde compañías de telefonía fija: Esto principalmente debido a que este tipo de tráfico no está asociado al pago del cargo de acceso móvil, por lo que la inclusión de éste en el modelo luego debería ser descontada vía asignación, como tráfico de cargo de acceso móvil. Por otra parte el no incluirlo no implica mayores alteraciones en la modelación de las empresas y del cargo de acceso a través del LRIC puro, ya que éste tráfico en términos de demanda de elementos de red es de a lo más del 2%, por lo que no implica grandes cambios en la curva de costos de la empresa.
- b. Dentro de las variables a considerar para la estimación de los modelos, además de las series históricas de tráfico entre compañías móviles, se probó incluir variables como el aporte del PIB de telecomunicaciones, el cual por estar compuesto por la facturación debida al tráfico produce endogeneidades no deseadas en los modelos. Por lo que la inclusión de estas variables, si bien se probó no resultaron relevantes, sino más bien muy correlacionadas con el tráfico y sus retrasos.
- c. Dentro de las variables no consideradas están los precios por minuto de los tráficos, ya que no se cuenta con una base detallada de ellos, ni un valor aproximados de estos, como lo podría ser la recaudación por tipo de tráfico.
- d. Para el proceso de estimación de los modelos se utilizó la metodología de Hendry o la del *London School of Economics* (detallado en (Three Econometric Methodologies: A Critical Appraisal, 1987; Gilbert, 1990)), la cual ha pasado a ser la metodología tradicional de estimación de este tipo de modelos, la cual tiene un enfoque desde lo general a lo específico.



- e. Debido a las variaciones de tráfico impulsadas muy probablemente por decisiones comerciales de las empresas, y al efecto sobre la contabilidad de los clientes prepagos debido al cambio en la medida de la usuarios activos se incluyeron cuatro variables dummy, una para cada empresa en el segmento prepago y una cuarta variable para el caso del tráfico dentro de la red de Comcel, el cual varió en gran medida entre diciembre del año 2008 y enero del año 2009.
- f. En todos los casos se privilegió la capacidad de predicción fuera de la muestra, inclusive sobre los niveles de ajuste al interior de la muestra (R^2 ajustado), ya que éste es el fin último de las estimaciones de demanda realizadas.
- g. En un algunos casos se desechó la estimación obtenida, en particular se desechó para el caso de la estimación del tráfico saliente a fijo desde aparatos prepago de la empresa Movistar, ya que esta convergía muy rápidamente a cero en vista de la información disponible, por lo que se optó por tomar la tendencia del mismo tráfico para los clientes postpago para ésta empresa en particular. El otro caso corresponde a la estimación del trafico saliente desde clientes prepago de Movistar a Tigo, el cual fue calculado como la diferencia entre la estimación del tráfico saliente a móviles y el tráfico saliente a Comcel, desde clientes prepago de Movistar, ya que el modelo de mejor ajuste dentro de la muestra no pudo pasar los test de estabilidad y presentaba un gran error fuera de la muestra.

Finalmente los modelos resultantes por tipo de usuario-tráfico-sentido-empresa. Son resumidos en las siguientes tablas por empresa, ya que por la cantidad de modelos utilizados, la presentación por extensión escapa de los propósitos de éste capítulo



Tabla 2: Resultado de los Modelos de Estimación del Logaritmo Natural del Tráfico por Abonado para Comcel

	Comcel											
	Tráfico Saliente - Prepago					Tráfico Saliente - Pospago						
	Avantel	Tigo	Comcel	Movistar	TPBC	Saliente Movil	Avantel	Tigo	Comcel	Movistar	TPBC	Saliente Movil
Est. de 12 Retrasos								-0,0137	-0,0023			
Est. de 11 Retrasos			-0,0304									-0,0062
Est. de 10 Retrasos								-0,0121	-0,0044	-0,0082		-0,0155
Est. de 9 Retrasos								0,0056		0,0045	0,0054	
Est. de 8 Retrasos								-0,0053	-0,0009			
Est. de 7 Retrasos										-0,0086		
Est. de 6 Retrasos								-0,0129	-0,0046			-0,0172
Est. de 5 Retrasos									-0,0014	0,0036		-0,0057
Est. de 4 Retrasos										0,0028		
Est. de 3 Retrasos									-0,0013			
Est. de 2 Retrasos			-0,0169							0,0038		
Est. de 1 Retraso									0,0018			
12 Retrasos		0,3700		0,2271	0,2632				0,0966			
11 Retrasos								0,2507				
10 Retrasos		-0,3846		-0,4725	-0,3500			-0,5049				
9 Retrasos									-0,0648			-0,1754
8 Retrasos								0,1552				
7 Retrasos		0,2286		0,1834								
6 Retrasos											0,3194	
5 Retrasos		0,3268		0,3182	0,2639				0,1244			
4 Retrasos												-0,6928
3 Retrasos			0,1066									0,4773
2 Retrasos												0,3512
1 Retraso			0,3373		0,4667			0,8268		0,9990		0,6189
Constante		-0,1039	2,5251	0,1818	-0,0662			0,8782	5,4407			0,3725



Tabla 3: Resultado de los Modelos de Estimación del Logaritmo Natural del Tráfico por Abonado para Movistar

	Movistar											
	Tráfico Saliente - Prepago					Tráfico Saliente - Pospago						
	Avantel	Tigo	Comcel	Movistar	TPBC	Saliente Movil	Avantel	Tigo	Comcel	Movistar	TPBC	Saliente Movil
Est. de 12 Retrasos							-0,0675	-0,0119	-0,0119	-0,0274		
Est. de 11 Retrasos							-0,0341		-0,0180	-0,0416		
Est. de 10 Retrasos												
Est. de 9 Retrasos							-0,0484		-0,0096	-0,0125		
Est. de 8 Retrasos							-0,0167		-0,0094	-0,0142		
Est. de 7 Retrasos							-0,0502		-0,0128	-0,0188		
Est. de 6 Retrasos								0,0188				
Est. de 5 Retrasos							-0,0467					
Est. de 4 Retrasos							-0,0389	-0,0077		-0,0226		
Est. de 3 Retrasos										-0,0056		
Est. de 2 Retrasos							-0,0568	-0,0130	-0,0122	-0,0258		
Est. de 1 Retraso			0,0599				0,0142	0,0050				
12 Retrasos				0,1819				0,1122				
11 Retrasos												
10 Retrasos												
9 Retrasos												
8 Retrasos							0,3298		0,2573			
7 Retrasos							-0,4341					
6 Retrasos												
5 Retrasos												
4 Retrasos		0,2496			0,2551			-0,4502				
3 Retrasos		-0,3389			-0,3442							
2 Retrasos								0,5029	0,3312	0,6358		
1 Retraso		1,0819	0,6100	0,8609	1,0829		0,9550	0,8369		0,3721		
Constante			1,3771	-0,0612			0,5430		2,3676			

Tabla 4: Resultado de los Modelos de Estimación del Logaritmo Natural del Tráfico por Abonado para Tigo

	Tigo											
	Tráfico Saliente - Prepago					Tráfico Saliente - Pospago						
	Avantel	Tigo	Comcel	Movistar	TPBC	Saliente Movil	Avantel	Tigo	Comcel	Movistar	TPBC	Saliente Movil
Est. de 12 Retrasos		-0,0291					-0,0186			-0,0563		
Est. de 11 Retrasos		-0,0539		0,0998			-0,0132		-0,0187	-0,0225		
Est. de 10 Retrasos		-0,0338		0,1543	0,0292							
Est. de 9 Retrasos		-0,0505		0,1013								
Est. de 8 Retrasos		-0,0359		0,1406								
Est. de 7 Retrasos		-0,0579		0,1009			-0,0091					
Est. de 6 Retrasos		-0,0493		0,2281						0,0174		
Est. de 5 Retrasos		-0,0266		0,1532			-0,0098		0,0206	-0,0199		
Est. de 4 Retrasos		-0,0137		0,1842			-0,0070					
Est. de 3 Retrasos				0,2742					0,0476	0,0215		
Est. de 2 Retrasos		-0,0229					-0,0152					
Est. de 1 Retraso				0,3813	0,1495		0,0095		0,0570	0,0572		
12 Retrasos		-0,1547		-0,0682					-0,3136	-0,0587		
11 Retrasos												
10 Retrasos								0,3918				
9 Retrasos												
8 Retrasos					-0,2223							
7 Retrasos			0,1077		0,3484				0,6303			
6 Retrasos												
5 Retrasos												
4 Retrasos									0,2343			
3 Retrasos												
2 Retrasos				-0,4406								
1 Retraso			0,7811	1,0248	0,7915		1,0043	0,6030	0,4326	1,0570		
Constante		5,0017	0,3090	0,3983								



A pesar de que se desarrollaron modelos de MOU separados en una gran cantidad de tráficos en general el resultado del tráfico promedio por usuario del mercado es decreciente, tal como lo predice la teoría económica, con el caso particular que en Colombia esta decrecencia es a muy baja tasa por el hecho de las atractivas ofertas de precios y promociones en el mercado.

Tráfico de Cargo de Acceso

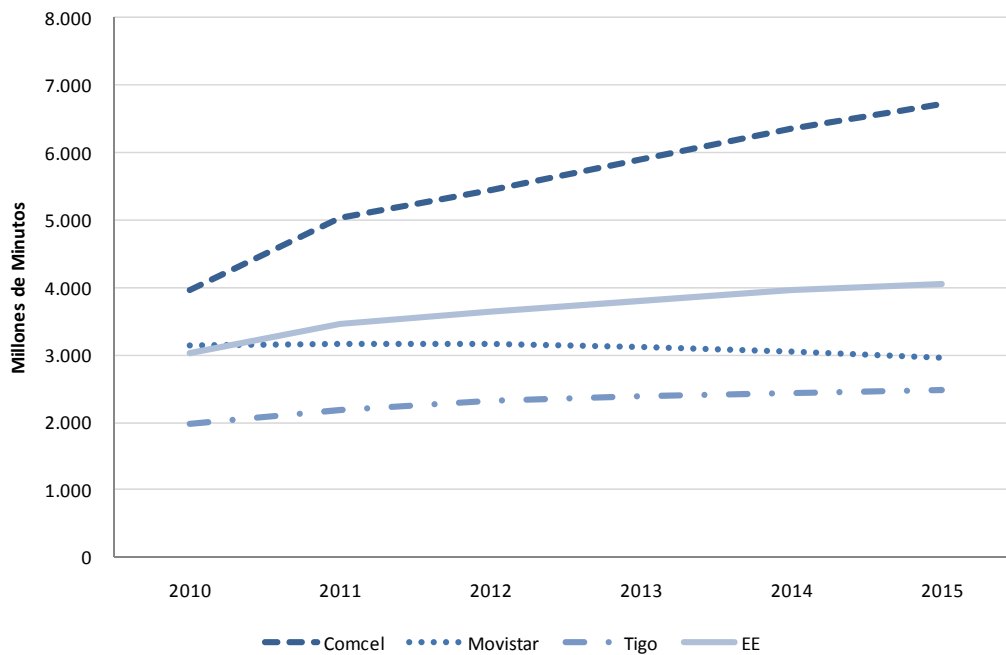


Ilustración 9: Proyección del Tráfico de Cargo de Acceso por Concesionaria

En lo referido al caso particular de tráfico de cargo de acceso por compañía este ha seguido una clara tendencia en la data observada y en las proyecciones obtenidas, aumentando el tráfico hacia Comcel y disminuyendo el tráfico hacia los usuarios de Movistar, manteniendo en términos relativos el tráfico entrante hacia los clientes de Tigo.



COBERTURA

Para la construcción de la cobertura de las Empresas Modeladas y la Empresa Eficiente, se utilizó la información proporcionada por ellas al MinTIC e información territorial pública, no utilizando los cuerpos de agua marítimos para la estimación de cobertura. Es importante notar que la empresa de mayor cobertura nacional alcanza alrededor de un 26% del total de territorio, lo cual resulta significativo en un país con las características de Colombia, gran extensión territorial, presencia importante de serranía y zonas selváticas. A nivel de municipios todos ellos presentan algún tipo de cobertura prestada por alguna de las concesionarias de telefonía móvil.

Para la estimación de cobertura se utilizaron diversas fuentes, que se detallan a continuación:

- Elevación resolución 9s (aprox 245 m x 245 m): CGIAR-SRTM
- Áreas Administrativas País: Global Administrative Areas Database (GADM Organization)
- Fuentes de Agua Dulce y Caminos: Digital Chart of the World
- Cluter: U.S. National Imagery and Mapping Agency's (NIMA)
- Ubicación de las Estaciones Base (BS) de Tigo: Información Proporcionada por la Empresa
- Ubicación de las Estaciones Base (BS) de Comcel: Información Proporcionada por la Empresa

En base a la información proporcionada por las empresas se elaboraron mapas de cobertura para cada empresa. Estos mapas se omiten del presente documento por constituir información confidencial de los operadores.

A continuación se muestra una tabla con el área cubierta estimada por departamento, por la cobertura conjunta de las empresas con las que se contaban los datos.



Tabla 5: Área Cubierta por Departamento

Departamento	Área Cubierta	Departamento	Área Cubierta
Amazonas	3,42%	Huila	49,50%
Antioquia	47,93%	La Guajira	63,75%
Arauca	27,58%	Magdalena	66,92%
Atlántico	93,62%	Meta	22,93%
Bolívar	56,84%	Nariño	35,23%
Boyacá	65,94%	Norte de Santander	42,60%
Caldas	73,97%	Putumayo	24,32%
Caquetá	10,55%	Quindío	85,92%
Casanare	38,61%	Risaralda	65,69%
Cauca	39,60%	Santander	63,16%
Cesar	69,98%	Sucre	93,87%
Chocó	23,23%	Tolima	54,27%
Córdoba	64,93%	Valle del Cauca	51,86%
Cundinamarca	72,96%	Vaupés	6,10%
Guainía	1,89%	Vichada	4,37%
Guaviare	5,24%		

El paso final para estimar la cobertura, y en vista con que no se contaba con la información sectorizada del operador de mayor cobertura, en lo referente al Azimut y la Inclinación de las antenas, consistió en utilizar la información de Tigo para hacer la corrección para pasar de rango máximo a sectorizada, cálculo que aproximó de muy buena forma el único dato de cobertura máxima con la que cuenta el MinTIC en la actualidad para el operador de mayor cobertura.

Es importante notar que para el caso de la sectorización se utilizó la potencia correspondiente en cada sector para calcular la propagación, en cambio cuando se realizó el cálculo en base a celdas omnisectoriales se utilizó el mayor radio de sector presente en la celda, equivalente a su máxima potencia, además de la máxima altura de los sectores por tecnología. En base a lo anterior es posible notar que en algunos casos el radio de cobertura sectorizada es menor en alguno de los sectores.



RESULTADOS OBTENIDOS

Cargo de Acceso por Uso [US\$/minuto]

ID	Escenarios		Cargo de Acceso Uso			Cargo de Acceso Uso	
			LRIC Puro			LRIC Puro	
1	EE	[pesos/min]	\$	42,49	[US cents/min]		2,21 ¢

Cargo de Accesos por Capacidad [US\$/E1/mes]

ID	Escenarios		Cargo de Acceso Capacidad			Cargo de Acceso Capacidad	
			LRIC Puro			LRIC Puro	
1	EE	[pesos/E1/mes]	\$	21.040.878	[US\$/E1/mes]	US\$	10.946



BIBLIOGRAFÍA

- CRC. 2010.** *Consulta Pública - Escenarios Regulatorios para Mercado de "Voz Saliente Móvil"*. Bogotá : Comisión de Regulación de Telecomunicaciones, 2010.
- EC, Commission of the European Communities. 2009.** European Commission. *Commission Recommendation*. [En línea] 2009. [Citado el: 31 de 01 de 2010.] http://ec.europa.eu/governance/impact/ia_carried_out/docs/ia_2009/c_2009_3359_en.pdf.
- Gilbert, C.L. 1990.** Professor Hendry's Econometric Methology. [ed.] Oxford University Press. *In Modelling Economic Series*. Oxford : C.W.J. Granger, 1990.
- OECD. 2009.** *OECD Communications Outlook*. Paris : OECD PUBLISHING, 2009. *Three Econometric Methodologies: A Critical Appraisal*. **Pagan, A. 1987.** 1, s.l. : Journal of Economics Surveys, 1987, Journal of Economics Surveys, Vol. 1.
- Vogelsang, I. 2003.** "Price regulation of access to telecommunications networks." Journal of Economic Literature 41(3):830–862.

ANEXOS

METODOLOGÍAS ALTERNATIVAS DE CÁLCULO DEL VALOR DE REMUNERACIÓN DE COSTOS DEL CARGO DE ACCESO

A continuación se detallan alternativas metodológicas al cálculo del CTLP y del LRIC puro respectivamente, las cuales pueden ser utilizadas como base de comparación.

CÁLCULO DE COSTO INCREMENTAL DE LARGO PLAZO POR ELEMENTOS

La alternativa planteada al cálculo del CTLP es a través del **C**osto **I**ncremental de **L**argo **P**lazo (CILP), el cual a diferencia de éste no considera en el cálculo del cargo de acceso los costos y demanda de reposición, por lo que el valor es obtenido en forma conceptual sólo a través de los incrementos de costos y demanda a través de los años (ver Ilustración 10), esta metodología es similar (en términos metodológicos) a la utilizada por el regulador inglés OFCOM antes del año 2009.

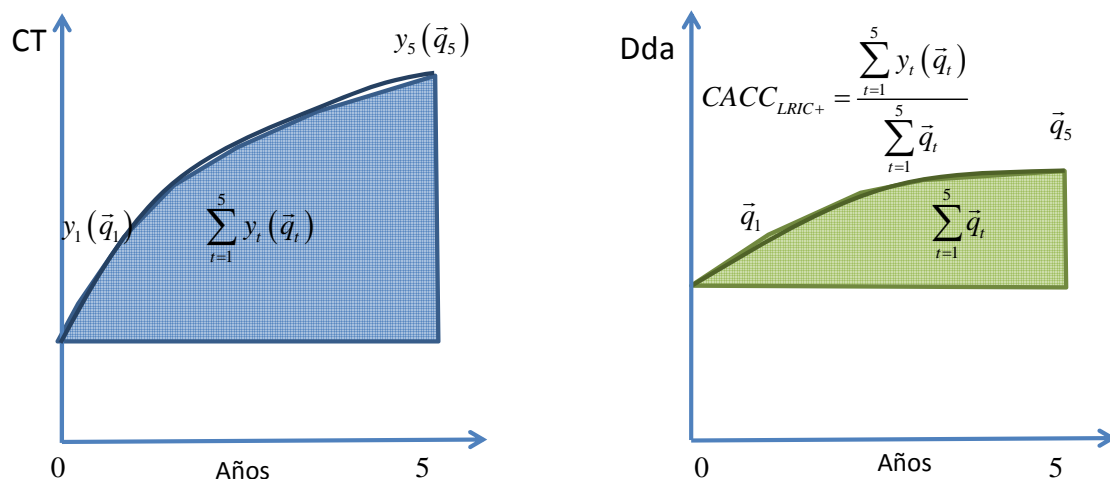


Ilustración 10: Esquema de Cálculo de Costo Incremental de Largo Plazo, Total Element LRIC+

Para el cálculo del costo total de largo plazo es necesario contar con los siguientes datos presentes en el modelo:

- $i_{n,t}$: Costo de Inversión Incremental con respecto al año 0 en el año t para el elemento de tipo n .
- $g_{n,t}$: Costo operacional Incremental con respecto al año 0 en el año t para el elemento de tipo n .
- $q_{n,t}$: Demanda Incremental en términos de los activos para el activo n para el año t .



$d_{n,t}$: Depreciación Incremental con respecto al año 0 por elemento de tipo n en el año t .
tax	: Tasa de Tributación
vr_n	: Valor Residual Incremental con respecto al año 0 del elemento n .
$y_{n,t}$: Costo Incremental de Largo Plazo asociado al año t y el elemento n (Valor a Determinar).
vu_n	: Vida útil del elemento n .

Para la obtención de los valores anteriores en base a los valores totales se siguen las siguientes formulaciones:

$$i_{n,t} = \max\{0, I_{n,t} - I_{n,0}\}$$

$$g_{n,t} = \max\{0, G_{n,t} - G_{n,0}\}$$

$$q_{n,t} = \max\{0, Q_{n,t} - Q_{n,0}\}$$

Para la depreciación lineal se sigue la siguiente fórmula:

$$d_{t,n} = \frac{1}{vu_n} \cdot \frac{(1+K_0)^{vu_n} K_0}{(1+K_0)^{vu_n} - 1} \cdot \sum_{s=\max\{0,t-1-vu_n\}}^{t-1} i_{s,n}, \forall t \geq 1$$

Para la depreciación acelerada:

$$d_{t,n} = \frac{1}{\lfloor vu_n/3 \rfloor} \cdot \frac{(1+K_0)^{\lfloor vu_n/3 \rfloor} - 1}{(1+K_0)^{\lfloor vu_n/3 \rfloor}} \cdot \frac{(1+K_0)^{vu_n}}{(1+K_0)^{vu_n} - 1} \cdot \sum_{s=\max\{0,t-1-vu_n\}}^{t-1} t_{s,n}, \forall t \geq 1$$

Para la depreciación geométrica, se sigue la siguiente fórmula:

$$d_{t,n} = TD_t \cdot \frac{(1+K_0)^{\lfloor vu_n/3 \rfloor} - 1}{(1+K_0)^{\lfloor vu_n/3 \rfloor}} \cdot \frac{(1+K_0)^{vu_n}}{(1+K_0)^{vu_n} - 1} \cdot \sum_{s=\max\{0,t-1-vu_n\}}^{t-1} i_{s,n}, \forall t \geq 1$$

$$TD_t = \left(1 - \sum_{s=0}^{t-1} TD_s\right) \cdot k_{geo}, \quad TD_0 = k_{geo}$$

Por otra parte el valor residual se calcula a partir de la siguiente fórmula:



$$vr_n = (1 + K_0)^5 \cdot \left(\sum_{t=1}^5 \frac{i_{t,n}}{(1 + K_0)^t} - \sum_{t=1}^5 \frac{1}{vu_n} \cdot \frac{(1 + K_0)^{vu_n} K_0}{(1 + K_0)^{vu_n} - 1} \cdot \sum_{s=\max\{0, t-1-vu_n\}}^{t-1} i_{s,n} \right)$$

De esta forma el Costo Incremental de Largo Plazo se obtiene de la suma de tres factores, el costo de la inversión, la depreciación por la tasa de tributación y los gastos ponderados por el complemento de la tasa de tributación, lo cual se lleva a valor presente y se le resta el valor residual de los elementos, en el año final. De acuerdo a la siguiente ecuación:

$$-\sum_{t=0}^5 \frac{i_{n,t}}{(1 + K_0)^t} + \sum_{t=0}^5 \frac{(y_{n,t} - g_{n,t}) \cdot (1 - tax) + d_{n,t} \cdot tax}{(1 + K_0)^t} + \frac{vr}{(1 + K_0)^5} = 0$$

Para obtener el valor del Cargo de Acceso es necesario dividir por la demanda incremental a través de los 5 años de evaluación respectivamente para estimar la tarifa correspondiente al CILP:

$$p_j = KT_j \sum_{n \in N} FR_{j,n} \left[\frac{\sum_{t=0}^5 \frac{y_{n,t}}{(1 + K_0)^t}}{\sum_{t=1}^5 \frac{q_{n,t}}{(1 + K_0)^t}} \right]$$

Donde:

p_j : Costo a Remunerar por el Servicio j con costos incrementales de largo plazo, por elementos.

CÁLCULO DEL COSTO MARGINAL DE LARGO PLAZO

La alternativa al cálculo del LRIC puro es a través del **Costo Marginal de Largo Plazo** (CMLP), este calcula el valor del costo marginal de los servicios a través de variaciones de demanda sobre el modelo, con el fin de obtener el valor de la derivada parcial del servicio en torno al punto de operación actual de la empresa modelada (ver Ilustración 11).

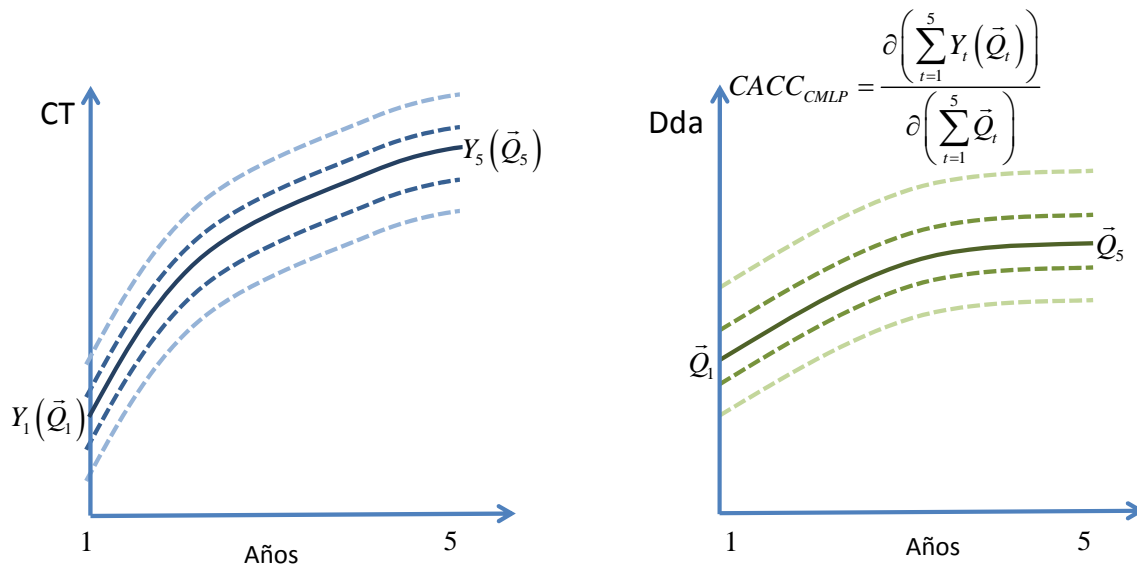


Ilustración 11: Esquema de Cálculo de Costo Marginal de Largo Plazo

A continuación se detalla tanto la implementación como el enfoque metodológico de los cálculos tarifarios expuestos.

Para el cálculo del costo marginal de largo plazo existen diferentes metodologías para obtener el valor de la derivada parcial del costo medio en el punto de operación de la demanda proyectada, para un servicio en particular.

En este caso la metodología para obtener la derivada parcial será la siguiente:

1. Realizar variaciones de toda la demanda del modelo a través de shocks de demanda. En términos operativos las variaciones de la demanda realizadas serán factores que afectan por igual a todos los impulsores de demanda de tráfico y abonados del modelo. Esto con el fin de obtener todos los efectos directos e indirectos asociados a cada servicio, sin que intervenga la matriz de asignación en los resultados.
2. Obtener los costos medios asociados a las variaciones de demanda.
3. Calcular la derivada numérica a partir de los datos obtenidos. Para el cálculo de la derivada numérica en la vecindad del demanda actual del modelo, se ajustó una función lineal con el objetivo de obtener la pendiente de la recta asociada a las variaciones.

De esta forma tenemos lo siguiente:

$$KT_j \cdot FR_{j,n} \cdot \sum_{t=0}^5 \frac{\bar{Y}_{n,t}}{(1+K_0)^t} = a + \hat{p}_{CMG,j} \cdot \sum_{t=1}^5 \frac{\bar{Q}_{j,n,t}}{(1+K_0)^t}$$



definiendo los vectores

$$\vec{Y}_{n,t} = \{Y_{n,t}^k\}_{k \in K} \text{ y } \vec{Q}_{j,n,t} = \{Q_{j,n,t}^k\}_{k \in K}$$

Donde:

- $Y_{n,t}^k$: Costo Total de Largo Plazo asociado al año t y el elemento n , para la variación k de la demanda
- $Q_{j,n,t}^k$: Demanda real del servicio j para el activo n para el año t , para la variación k
- $\hat{P}_{CMG,j}$: Costo Marginal de Largo Plazo, o Costo Marginal asociado al Costo Total (medio) de largo plazo, para el servicio j .

En teoría los valores los valores del LRIC puro y del costo marginal de largo plazo deberían ser similares, por lo que la existencia de este valor se puede utilizar como chequeo cruzado para el valor del LRIC puro.